УДК 517.9

С.Г. Хома-Могильська

РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

This paper studies boundary-value problem without initial conditions for the linear non-homogeneous second-order hyperbolic equation appearance $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le T$. Using the methods of the theory of differential equations in partial derivatives and methods of the theory of integral equations, for arbitrary functions $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R})$ the exact solution of the indicated problem is constructed as $u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t)$, where $u^0(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x} \mu(\alpha)d\alpha$ – the solution of the homogeneous equation and $\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$ – a particular solution of the non-homogeneous equation. New existence conditions of the indicated problem are established. The classes of functions $B_0^- = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(\pi - z)\}$, $B^- = \{f : f(x,t) = f(\pi - x,t) = -f(-x,t)\}$, in which there is a classical solution of the linear boundary-value problem without initial conditions for the second order hyperbolic equations are discriminated. Based on the results operator A, which translates the class of functions $B^- = \{f : f(x,t) = f(\pi - x,t) = -f(-x,t)\}$ in itself was built. This allows using it in the construction of approximate computations of the solution of boundary-value problems for the quasi-linear hyperbolic equations. The results are beginning of the boundary-value problems study without initial conditions for the second order hyperbolic equations in form $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t,u_t,u_x)$. The proposed method of construction of the solution can be applied also to solve the semi-linear boundary-value problems.

Keywords: boundary-value problem without initial conditions, the second order hyperbolic equation, solution, operator.

Вступ

Досліджуючи крайові періодичні задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку як лінійних, так і квазілінійних [1–4], нами вперше було застосовано нетрадиційний метод пошуку розв'язку вказаних задач. На відміну від низки вчених [5–8], які використовують методи функціонального аналізу, згідно з якими розв'язок шукається у вигляді тригонометричного ряду $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx$, що автоматично забезпечує виконання крайових умов $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, проте, вимагає накладання додаткових умов на праву частину неоднорідного рівняння, ми спочатку шукаємо періодичний розв'язок, а потім перевіряємо виконання крайових умов.

У працях В.М. Кирилича [9, 10] показано, що для деяких рівнянь та систем можна знайти розв'язок крайової задачі і без початкових умов. Якщо поставити за мету встановити, у якому просторі існує неперервний (класичний) розв'язок таких задач, то безпосередньої відповіді дати не можна. Лише у процесі застосування методу пошуку розв'язку можна відповісти на це питання.

У цій статті розглянемо крайову задачу без початкових умов для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. На відміну від результатів праць [5–8], ми шукатимемо класичний розв'язок поставленої задачі.

Постановка задачі

Метою роботи є встановлення умов, при яких може існувати розв'язок такої крайової задачі:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),$$

$$0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

та вивчення властивостей цього розв'язку.

Основні результати

Доведемо, що справедливе таке твердження:

Лема 1. Для довільної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R})$ і $f(x,t) \in C^{1,0}([0,\pi]\times[0,T])$ існує точний розв'язок рівняння (1), який визначається формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\mu(\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\equiv$$

$$\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t). \quad (3)$$

Доведення. Покажемо, що функція

$$u^0(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\mu(\alpha)d\alpha \quad (4)$$

є розв'язком однорідного рівняння

$$u_{tt}^0-a^2u_{xx}^0=0. \quad (5)$$

Обчислимо частинні похідні u_{tt}^0 і u_{xx}^0 від функції $u^0(x,t)$, визначеної формулою (4):

$$u_{tt}^0(x,t)=\frac{a}{2}\left(\frac{\partial\mu(at+x)}{\partial(at+x)}-\frac{\partial\mu(at-x)}{\partial(at-x)}\right);$$

$$u_{xx}^0(x,t)=\frac{1}{2a}\left(\frac{\partial\mu(at+x)}{\partial(at+x)}-\frac{\partial\mu(at-x)}{\partial(at-x)}\right).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $u_{tt}^0-a^2u_{xx}^0\equiv 0$. Отже, функція $u^0(x,t)$, яка визначена формулою (4), є розв'язком однорідного рівняння (5).

Далі обчислимо похідні $\tilde{u}_{tt}$ і $\tilde{u}_{xx}$ від функції $\tilde{u}(x,t)$, визначеної формулою

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi. \quad (6)$$

Маємо

$$\tilde{u}_t(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t(f(x+a(t-\tau),\tau)+$$

$$+f(x-a(t-\tau),\tau))d\tau;$$

$$\tilde{u}_x(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t(f(x+a(t-\tau),\tau)-$$

$$-f(x-a(t-\tau),\tau))d\tau;$$

$$\tilde{u}_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}(f(x,t)+f(x,t))+$$

$$+\frac{a}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial f(x+a(t-\tau),\tau)}{\partial(x+a(t-\tau))}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial f(x-a(t-\tau),\tau)}{\partial(x-a(t-\tau))}\right)d\tau;$$

$$\tilde{u}_{xx}=\frac{1}{2a}\int_0^t\left(\frac{\partial f(x+a(t-\tau),\tau)}{\partial(x+a(t-\tau))}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial f(x-a(t-\tau),\tau)}{\partial(x-a(t-\tau))}\right)d\tau.$$

Підстановкою переконуємося, що $\tilde{u}_{tt}-a^2\tilde{u}_{xx}=f(x,t)$. Отже, функція $\tilde{u}(x,t)$, яка визначена формулою (6), є частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (1).

Таким чином, функція $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)$, яка визначена формулою (3), є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (1) для довільної функції $\mu(z)\in C^1(\mathbf{R})$ і $f(x,t)\in C^{1,0}([0,\pi]\times[0,T])$.

Лему 1 доведено.

Щоб довести, що функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (6), задовольняє крайові умови

$$\tilde{u}(0,t)=\tilde{u}(\pi,t)=0, \quad (7)$$

зробимо ряд перетворень.

Спочатку визначимо клас функцій $f(x,t)$, для яких $\tilde{u}(\pi,t)=0$, тобто

$$\tilde{u}(\pi,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\equiv 0, \quad (8)$$

$$0\le t\le T.$$

Зрозуміло, що рівність (8) може виконуватися за умови

$$\int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi=0,\ 0\le t\le T. \quad (9)$$

Доведемо, що існує клас функцій, для яких справедливою є рівність (9). На основі лівої частини рівності (9) одержуємо

$$\int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi=\int_{\pi-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi+\int_{a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi=$$

$$= \int_{\pi-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi -$$

$$- \int_{\pi-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\pi-\eta,\tau)d\eta. \qquad (10)$$

Отже, якщо ввести такий клас функцій:

$$B^- = \{f : f(x,t) = f(\pi - x,t) = -f(-x,t)\},$$
$$0 \le x \le \pi, \ 0 \le t \le T,$$

то з рівності (10) при $f(x,t) \in B^-$ випливає виконання умови (9).

Аналогічно при умові $f(x,t) \in B^-$ маємо

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \equiv 0,$$
$$0 \le t \le T.$$

Справедливе твердження.

Лема 2. Якщо $f(x,t) \in B^-$, то $f(x,t) \in Q^-_{2\pi\times[0,T]}$, де $Q^-_{2\pi\times[0,T]} = \{f : f(x,t) = -f(-x,t) = f(x+2\pi,t)\}$.

Доведення. Справді, $f(x+2\pi,t) = f(\pi - (-\pi - x),t) = -f(\pi + x,t) = -f(\pi-(-x),t) = -f(-x,t) = f(x,t)$, що й потрібно було довести.

Через $Q^-_{2\pi}$ позначимо такий клас функцій:

$$Q^-_{2\pi} = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(z+2\pi)\},$$

визначених і неперервних на $\mathbf{R}$.

Лема 3. Якщо $\mu(z) \in Q^-_{2\pi}$, то функція $u^0(x,t)$, визначена формулою (4), задовольняє крайові умови

$$u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0. \qquad (11)$$

Доведення. Справді,

$$u^0(0,t) = \frac{1}{2a}\int_{at}^{at} \mu(\alpha)d\alpha \equiv 0.$$

Покладемо замість x у формулі (4) $x = \pi$. Маємо

$$u^0(\pi,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-\pi}^{at+\pi} \mu(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2a}\int_{at-\pi}^{-\pi} \mu(\alpha)d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{-\pi}^{\pi} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{\pi}^{at+\pi} \mu(\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{at-\pi}^{-\pi} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{-\pi}^{\pi} \mu(\alpha)d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{-\pi}^{at-\pi} \mu(2\pi+\beta)d\beta = 0,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. Якщо через B_0^- позначити клас функцій $B_0^- = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(\pi - z)\}$, то розв'язок однорідного рівняння (5), визначений формулою (4), при $\mu(z) \in B_0^-$ також задовольняє крайові умови (11). Справді, якщо $\mu(z) \in B_0^-$, то $\mu(z) \in Q^-_{2\pi}$.

Таким чином, враховуючи доведені вище твердження, можна сформулювати такий результат.

Теорема 1. Для довільної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R}) \cap B_0^-$ і функції $f(x,t) \in C^{1,0}([0,\pi]\times[0,T]) \cap B^-$ існує точний розв'язок крайової задачі (1), (2), який задається формулою (3).

Встановимо властивості розв'язку крайової задачі (1), (2).

Введемо позначення

$$u(x,t) = (A[\mu,f])(x,t), \qquad (12)$$

де A — оператор, який породжує розв'язок лінійної неоднорідної крайової задачі (1), (2) і при $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R}) \cap B_0^-$, $f(x,t) \in C^{1,0}([0,\pi]\times[0,T]) \cap B^-$ задається формулою

$$(A[\mu,f])(x,t) =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi. \qquad (13)$$

Теорема 2. Якщо $\mu(z) \in C(\mathbf{R}) \cap B_0^-$ і $f(x,t) \in C([0,\pi]\times[0,T]) \cap B^-$, то справедливі рівності

$$u(-x,t) = -u(x,t); \qquad (14)$$
$$u(\pi - x,t) = u(x,t), \qquad (15)$$

тобто оператор A переводить клас функцій із класу B^- у цей же клас функцій ($B^- \xrightarrow{A} B^-$).

Доведення. На основі формули (13) одержуємо

$$(A[\mu,f])(-x,t) =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{at+x}^{at-x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}\mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(-\eta,\tau)d\eta =$$

$$= -(A[\mu, f])(x,t).$$

Отже, рівність (14) справедлива.

Для доведення рівності (15) запишемо

$$(A[\mu, f])(\pi - x, t) =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{at-\pi+x}^{at+\pi-x}\mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\pi-x-a(t-\tau)}^{\pi-x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \equiv$$

$$\equiv u^0(\pi - x, t) + \tilde{u}(\pi - x, t). \qquad (16)$$

Окремо доведемо, що

$$u^0(\pi - x, t) = u^0(x,t), \qquad (17)$$

$$\tilde{u}(\pi - x, t) = \tilde{u}(x,t). \qquad (18)$$

На основі формули (4) одержуємо

$$u^0(\pi - x, t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{at-\pi+x}^{at+\pi-x}\mu(\alpha)d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_{-at+2\pi-x}^{-at+x}\mu(\pi-\beta)d\beta = \frac{1}{2a}\int\limits_{-at+x}^{2\pi-at-x}\mu(\beta)d\beta =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{-2\pi+at+x}\mu(-\gamma)d\gamma = \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{-2\pi+at+x}\mu(\gamma)d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}\mu(\gamma)d\gamma + \frac{1}{2a}\int\limits_{at+x}^{-2\pi+at+x}\mu(\gamma)d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}\mu(\gamma)d\gamma + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{-2\pi}\mu(\gamma)d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}\mu(\gamma)d\gamma + 0 = u^0(x,t). \qquad (19)$$

Враховуючи формулу (6), маємо

$$\tilde{u}(\pi - x, t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\pi-x-a(t-\tau)}^{\pi-x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\pi-\eta,\tau)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)d\eta = \tilde{u}(x,t). \qquad (20)$$

Таким чином, враховуючи рівності (19), (20) на основі (16), переконуємося у справедливості теореми 2.

Висновки

У статті встановлено нові умови існування класичного розв'язку лінійної крайової задачі без початкових умов для гіперболічного рівняння другого порядку вигляду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le T$. Запропоновано метод побудови такого розв'язку та досліджено його властивості залежно від умов, накладених на коефіцієнти.

Для довільної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R})$ побудовано точний розв'язок вказаної задачі у вигляді $u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t)$, де $u^0(x,t) = \frac{1}{2a} \times \times \int\limits_{at-x}^{at+x}\mu(\alpha)d\alpha$ — розв'язок однорідного рівняння, а $\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

На основі теорем 1, 2 побудовано оператор A, який переводить клас функцій $B^- = \{f : f(x,t) = f(\pi - x, t) = -f(-x,t)\}$ у самого себе. Це дає змогу використовувати його при побудові наближених обчислень розв'язку крайових задач для гіперболічних рівнянь. Отримані результати є початком вивчення крайових задач без початкових умов для гіперболічних рівнянь другого порядку вигляду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = = f(x,t,u_t,u_x)$. Запропонований метод побудови розв'язку можна застосувати також для розв'язування напівлінійних крайових задач. Наприклад, для дослідження крайових задач для рівняння дисперсії хвиль вигляду $\overline{u}_{tt} - - a^2\overline{u}_{xx} + b_1\overline{u}_t + b_2\overline{u}_x + \overline{cu} = 0$, яке заміною $\overline{u} = = ue^{\lambda x + \beta t}$, де λ, β — числа, зводиться до рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le T$, та більш загальних рівнянь $u_{tt} - u_{xx} + + \alpha u_t + \varepsilon F(t,x,\overline{u}) = 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le T$, де $\overline{u} = (u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{tx})$.

Список літератури

1. *Митропольский Ю.А.*, *Хома-Могильська С.Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.
2. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Хома-Могильська С.Г.* Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 30–36.
3. *Самойленко А.М., Хома-Могильська С.Г.* Аналітичний метод відшукання 2π-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 25–29.
4. *Самойленко А.М., Хома Н.Г., Хома-Могильська С.Г.* Окремий випадок існування 2π-періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку // Доп. НАН України. – 2012. – № 2. – С. 35–41.
5. *P. Rabinowitz,* "Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations," Comm. Pure Appl. Math, vol. 20, no. 1, pp. 145–205, 1967.
6. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Нелокальні* крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Бойчук А.А., Коростиль И.А., Фечкан М.* Условия бифуркации решения абстрактного волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2007. – **43**, № 4. – С. 481–487.
9. *Кирилич В.М., Мишкіс А.Д.* Крайова задача без початкових умов для лінійної одномірної системи рівнянь гіперболічного типу // Доп. АН УРСР. – 1991. – Сер. А, № 5. – С. 8–10.
10. *Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Краевая задача без начальных условий для линейной одномерной системы уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. – 1992. – **28**, № 3. – С. 463–469.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
17 лютого 2014 року